JOURNAL OF ALGEBRA 102, 537–555 (1986)

Représentations modulaires symétriques

CLAUDE CIBILS

Institut de Mathématiques, C. P. 240, 1211 Genève 24, Switzerland

Communicated by Walter Feit

Received January 28, 1985

INTRODUCTION

Soit k un corps de caractéristique p et G un groupe fini dont les p-sous-groupes de Sylow sont non cycliques. Sous ces hypothèses, Higman a montré [9] que l'algèbre de groupe kG est de représentation infinie. Cela veut dire qu'il existe une infinité de modules indécomposables non isomorphes.

Par contre, si les p-sous-groupes de Sylow sont cycliques, kG est de représentation finie.

Nous dirons qu'un kG-module est *symétrique* s'il admet une forme bilinéaire symétrique non dégénérée pour laquelle le groupe agit par isométries.

Nous nous proposons de montrer que pour les mêmes hypothèses que celles du théorème de Higman, l'algèbre kG est aussi de représentation *symétrique* infinie, c'est-à-dire admet une infinité de modules indécomposables symétriques non isomorphes.

On verra d'abord qu'un p-groupe non cyclique H est de représentation symétrique infinie (caract $k = p$).

Nous réussissions à construire des modules symétriques qui restent indécomposables lors de l'induction d'un p-sous-groupe de Sylow à son normalisateur. La correspondance de Green permet alors d'obtenir le théorème.

Cet article reprend une partie de ma thèse de doctorat [3]. Je tiens à remercier ici M. Kervaire, mon directeur de thèse. Son aide a été indispensable pour obtenir ces résultats.

I. ENONCÉS, MODÈLES

Soit k un corps et G un groupe. Les kG-modules considérés seront toujours à gauche et de type fini.

0021-8693/86 $3.00

DÉFINITION. Un kG-module M est dit *ε-symétrique* ($\varepsilon = \pm 1$) s'il admet une forme bilinéaire

$$b: M \times M \to k$$

ε-symétrique, non dégénérée et vérifiant

$$\forall s \in G, \qquad b(sm, sn) = b(m, n).$$

Souvent, $(+1)$-symétrique est remplacé par symétrique et (-1)-symétrique par antisymétrique.

Remarques. Si M est un module symétrique, il est autodual. L'isomorphisme entre M et le module $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ muni de l'action $(s \cdot \varphi)(m) = \varphi(s^{-1}m)$ est donné par l'adjointe $b(m, -)$ de la forme symétrique b.

Réciproquement, si M est un module indécomposable autodual, et si la caractéristique de k est différente de deux, alors M est symétrique ou antisymétrique.

En effet, soit $c: M \to M^*$ un isomorphisme. Considérons $c = ((c + c^*)/2) + ((c - c^*)/2)$. Le premier terme est symétrique, le deuxième antisymétrique. L'un des deux est inversible car $\mathrm{End}_{kG} M$ est un anneau local. (Lemme de Fitting, [6, p. 125].)

Nous pouvons être plus précis lorsque $\mathrm{End}_{kG} M/\mathrm{rad}\, \mathrm{End}_{kG} M \simeq k$. Dans ce cas, et si M est indécomposable autodual, il est symétrique ou (*exclusif*) antisymétrique. Cela aussi est facile à vérifier.

DÉFINITION. L'algèbre kG est dite de représentation ε-symétrique non bornée si:

lorsque k est infini: il existe une infinité de classes d'isomorphisme de kG-modules indécomposables ε-symétriques de dimension d, pour des entiers positifs d arbitrairement grands.

lorsque k est fini: il existe des kG-modules indécomposables ε-symétriques de dimension arbitrairement grande.

L'objectif de cet article est le résultat suivant:

THÉORÈME I. *Soit G un groupe fini et k un corps de caractéristique p. Supposons qu'un p-sous-groupe de Sylow de G est non cyclique. L'algèbre kG est alors de représentation symétrique non bornée.*

Nous montrerons d'abord le théorème lorsque G est un p-groupe abélien élémentaire ($p \neq 2$), en construisant des modules à partir de certains modèles. Nous supposerons ensuite le corps infini, et le p-sous-groupe de

Sylow de G normal et non cyclique. Dans ce cas l'induction permet de montrer le théorème. Enfin le cas général (lorsque le corps est infini) est obtenu en utilisant le correspondance de Green.

Nous verrons ensuite comment obtenir le théorème pour les corps finis lorsqu'il est établi pour les corps algébriquement clos.

Le cas $p=2$ sera traité en appendice.

Remarques. (1) Je ne sais pas si le théorème 1 est vrai lorsque l'on remplace symétrique par antisymétrique. Sous certaines hypothèses (explicitées à la Sect. 3) sur le p-Sylow ou sur son normalisateur, il est possible d'en donner une démonstration (voir [3]). Mais quelques cas restent ouverts. Soient $C_3 \times C_3$ le 3-groupe abélien élémentaire d'ordre 9 et C_2 le groupe cyclique d'ordre 2. Soit $G=(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ le produit semi-direct pour l'action de C_2 "passage à l'inverse." Soit k un corps de caractéristique 3 algébriquement clos. Je ne sais pas si kG est de représentation antisymétrique finie ou infinie, j'ignore même s'il existe dans ce cas un kG-module antisymétrique indécomposable.

(2) Le théorème 1 est faux lorsque l'on remplace kG par une algèbre avec involution et de représentation infinie. Le contre-exemple suivant m'a été indiqué par Quebbemann: Soit k un corps quelconque et A l'algèbre du carquois:

$$\dot{e}_1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} \dot{e}_2 \underset{d}{\overset{c}{\rightrightarrows}} \dot{e}_3.$$

Notons $\Lambda = A/\mathrm{rad}^2 A$. L'algèbre Λ est de k-dimension finie et de représentation non bornée. Considérons sur Λ l'involution donnée par:

$$\overline{e_1}=e_3, \qquad \bar{a}=c,$$
$$\overline{e_2}=e_2, \qquad \bar{b}=d.$$

Le seul module indécomposable autodual est

$$0 \rightrightarrows k \rightrightarrows 0.$$

Définition. Considérons le semi-groupe (pour la somme orthogonale) des classes d'isométrie de kG-modules symétriques. Le groupe de Witt direct, noté $DW(kG)$ est le quotient de ce semi-groupe par la relation d'équivalence de Witt: $M \sim N \Leftrightarrow$ il existe des kG-modules symétriques *neutres* X et Y avec

$$M \perp X \simeq N \perp Y;$$

$\simeq$ désigne l'isométrie de modules, $\perp$ la somme orthogonale. Un module symétrique est *neutre* s'il admet un *métaboliseur* facteur direct, c'est-à-dire un facteur direct égal à son orthogonal.

Le résultat suivant décrit $DW(kG)$. Il est démontré dans [12].

PROPOSITION. *Soit* $\operatorname{ind}_{+1} kG$ *l'ensemble des classes d'isomorphie de* kG*-modules indécomposables symétriques. Soit* $M \in \operatorname{ind}_{+1} kG$. *Notons* $\overline{\operatorname{End}}_{kG} M$ *le corps gauche* $\operatorname{End}_{kG} M/\operatorname{rad} \operatorname{End}_{kG} M$.

$$DW(kG) = \bigoplus_{M \in \operatorname{ind}_{+1} kG} WH(\overline{\operatorname{End}}_{kG} M, -).$$

Chaque terme de cette somme directe désigne le groupe de Witt des formes hermitiennes sur $\overline{\operatorname{End}}_{kG} M$, par rapport à l'involution $\overline{}$. Celle-ci est obtenue en choisissant une forme symétrique b sur M et en posant $\bar{f} = b^{-1} f^* b$ (passage à l'adjoint de l'endomorphisme f).

En utilisant cette proposition et le théorème 1, le corollaire suivant est immédiat:

COROLLAIRE 2. *Soit k un corps de caractéristique p et G un groupe fini dont un p-sous-groupe de Sylow est non cyclique. Alors $DW(kG)$ est de génération infinie.*

Remarque. Si nous supposons que k est un corps fini ou bien algébriquement clos, cela garantit que chaque $DW(\overline{\operatorname{End}}_{kG} M, -)$ est de génération finie (voir [4]). Dans ce cas la réciproque du corollaire 2 est évidente.

Modèles et modules symétriques

A partir de certaines données, nous allons construire des modules symétriques sur une algèbre de groupe. L'idée de la construction vient de l'analyse des suites de Loewy des modules symétriques de hauteur 3.

Soit k un corps de caractéristique $p \neq 2$ et G un groupe fini.

DONNÉES. U un k-espace vectoriel

f: $G \to \operatorname{Hom}_k(U, U)$ un homomorphisme: $f(ss') = f(s) + f(s')$, pour tous $s, s' \in G$,

b: $U^* \to U$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée telle que,

$$f(s)\, bf(s')^* : U^* \to U \text{ est symétrique pour tous } s, s' \in G. \qquad (*)$$

Considérons l'expace vectoriel $U \oplus U \oplus U^*$. Nous le munissons d'une action de G en associant à chaque $s \in G$ la matrice

$$S(s) = \begin{pmatrix} 1 & f(s) & -\frac{1}{2} f(s)\, bf(s)^* \\ 0 & 1 & -bf(s)^* \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S est un homomorphisme en vertu de $(*)$.

Chaque $S(s)$ est une isométrie de la forme bilinéaire

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le kG-module symétrique obtenu est noté $M_{f,b}$.

Remarques. Supposons que G est un p-groupe $(p \neq 2)$ et k de caractéristique p. Une k-base du radical de kG est alors $\{s-1\}_{s \in G}$. Supposons que l'homomorphisme f des données vérifie $\bigcap_{s \in G} \operatorname{Ker} f(s) = 0$. Il est alors facile de vérifier que la hauteur de $M_{f,b}$ est 3. (La hauteur d'un module est la plus petite puissance du radical qui annule le module).

Supposons que $\bigcap_{s \in G} \operatorname{Ker} f(s) = 0$ et que $\sum_{s \in G} \operatorname{Im} f(s) = U$. Nous avons alors:

$$(\operatorname{rad} kG) M_{f,b} = U \oplus U \oplus 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{soc} M_{f,b} = U \oplus 0 \oplus 0;$$

$\operatorname{soc} M_{f,b}$ désigne le socle du module, c'est-à-dire l'ensemble des éléments annulés par le radical de l'algèbre.

Morphismes des modèles. Soient $M_{f,b}$ et $M_{f',b'}$ des modèles de kG-modules symétriques. Supposons que le radical et le socle des modèles sont donnés comme à la remarque ci-dessus.

PROPOSITION 3. *Une application linéaire $\varphi : M_{f,b} \to M_{f',b'}$ est un kG-morphisme si et seulement si:*

(i) *φ est triangulaire supérieure*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & x & y \\ 0 & \varphi_2 & z \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix},$$

(ii) *les conditions suivantes sont vérifiées:*

$$\begin{aligned} \forall s \in G, \qquad &\text{(i)} \quad \varphi_1 f(s) = f'(s)\, \varphi_2, \\ &\text{(ii)} \quad \varphi_2 b f(s)^* = b' f'(s)^* \varphi_3, \\ &\text{(iii)} \quad -x b f(s)^* = f'(s) z. \end{aligned}$$

Ce résultat est facile à vérifier. Il découle du fait qu'un kG-morphisme doit préserver le radical et le socle, puis du calcul de l'égalité matricielle $\varphi S(s) = S'(s) \varphi$.

La hauteur au moins 3 pour les modules indécomposables symétriques est indispensable, au vu du résultat suivant:

LEMME. *Soit k un corps de caractéristique $p \neq 2$ algébriquement clos et $G = C_p \times C_p$, le produit de deux groupes cycliques d'ordre p.*

Tout kG-module indécomposable autodual de hauteur 2 est antisymétrique.

La preuve se fait par inspection de la liste des kG-modules de hauteur 2 qui s'obtient à partir de la classification des représentations indécomposables du carquois $\cdot \rightrightarrows \cdot$ (voir [2, 1]).

II. p-GROUPE ABELIEN ÉLEMENTAIRE ($p \neq 2$)

Soit H_0 un p-groupe abélien élémentaire non cyclique, $p \neq 2$, dont nous fixons une base:

$$H_0 = \langle h_0, h_1, ..., h_n \mid h_i^p = 1, h_i h_j = h_j h_i \rangle, \qquad n \geqslant 1.$$

DEFINITION. Soit $\lambda = (1, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in k^{n+1}$. M_λ^m désigne le kH_0-module symétrique obtenu à partir des données suivantes (cf. Sect. I):

$U = k$-espace vectoriel de dimension m avec base choisie;

b: $U^* \to U$ la forme bilinéaire symétrique non dégénérée de matrice

$$b = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix};$$

f_λ: $H_0 \to \mathrm{Hom}_k(U, U)$ l'homomorphisme déterminé par:

$$f_\lambda(h_0) = 1, \qquad f_\lambda(h_1) = J_{\lambda_1}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix};$$

$$f_\lambda(h_i) = \lambda_i \qquad \text{si} \quad i \geqslant 2.$$

Pour que la condition (*) des données soit vérifiée il suffit de constater que la matrice $J_0 b$ est symétrique.

L'étude des modèles nous montre que les modules M_λ^m sont de hauteur 3 et que

$$\mathrm{soc}\, M_\lambda^m = U \oplus 0 \oplus 0; \qquad \mathrm{rad}\, M_\lambda^M = U \oplus U \oplus 0.$$

PROPOSITION 4. (a) *M_λ^m est un module indécomposable pour tout $\lambda = (1, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in k^{n+1}$.*

(b) $M_\lambda^m \simeq M_\mu^m \Leftrightarrow \lambda = \mu$.

Cette proposition démontre donc le théorème 1 lorsque $G = H_0$, un p-groupe abélien élémentaire non cyclique.

Preuve de (a). Considérons un kH_0-endomorphisme idempotent φ de M_λ^m. Par la proposition 3 ($s = h_0$), nous obtenons que $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\varphi_2 b = b\varphi_3$. Puis avec $s = h_1$, nous avons que φ_1 commute à J_{λ_1}. D'autre part φ_1, φ_2 et φ_3 sont idempotents car φ l'est. Il suit que $\varphi_1 = 0$ ou 1. Sous ces conditions il est immédiat que $\varphi = 0$ ou 1.

Ainsi M_λ^m est indécomposable car un facteur direct non trivial donnerait lieu à un idempotent non trivial.

Preuve de (b). Soit φ un kH_0-isomorphisme de M_λ^m dans M_μ^m. Comme avant, nous avons $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\varphi_1 J_{\lambda_1} = J_{\lambda_1} \varphi_1$. De la proposition 3 ($s = h_i$) nous tirons $\lambda_i \varphi_i = \mu_i \varphi_i$ pour $i \geqslant 2$. Comme φ est inversible, φ_1 l'est aussi et nous concluons $\lambda = \mu$. ∎

Le théorème suivant sera fort utile par la suite:

Notation. Soit σ un automorphisme d'un groupe fini G. Soit M un kG-module. Le module σ-conjugué ${}^\sigma M$ est le même espace vectoriel M muni d'une nouvelle action de G:

$$sm = \sigma^{-1}(s)m \qquad \text{pour tout } s \in G.$$

Cela fournit une action à gauche de Aut G sur les classes d'isomorphisme de kG-modules.

THÉORÈME 5. *Supposons le corps k infini. Soit E l'ensemble des éléments $(1, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in k^{n+1}$ ($n \geqslant 1$) vérifiant:*

(a) *Pour tout $\lambda \in E$ et pour tout automorphisme σ non scalaire de H_0, on a*

$$M_\lambda^m \not\simeq {}^\sigma(M_\lambda^m).$$

(b) *Quel que soit $\lambda \in E$, l'ensemble $\{1, \lambda_1, ..., \lambda_n\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbb{F}_p$.*

E est un ensemble infini.

Nous identifions k^{n+1} à $k \otimes_{\mathbb{F}_p} H_0$. De cette façon Aut $H_0 \subset GL(k^{n+1})$.

LEMME 6. *Soit $\sigma \in$ Aut H_0. Supposons que $M_\lambda^m \simeq {}^\sigma(M_\lambda^m)$. Alors $(1, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ est un vecteur propre de $(\sigma^{-1})^t$.*

Preuve. Remarquons d'abord que si M_f est un kH_0-module construit à partir de données (cf. Sect. I), et si $\sigma \in \operatorname{Aut} H_0$, nous avons ${}^{\sigma}M_f = M_{f\sigma^{-1}}$.

Soit (x_{ij}) la matrice de $(\sigma^{-1})^t$ dans la base de H_0.

Nous avons donc ${}^{\sigma}M_{\lambda} = M_{g_{\lambda}}$, où $g_{\lambda} = f_{\lambda}\sigma^{-1}$, c'est-à-dire:

$$g_{\lambda}(h_i) = x_{0i} + x_{1i}J_{\lambda_1} + x_{2i}\lambda_2 + \cdots + x_{ni}\lambda_n.$$

Pour chaque i la matrice $g_{\lambda}(h_i)$ est donc triangulaire inférieure avec une seule valeur propre:

$$a_i = x_{0i} + x_{1i}\lambda_1 + \cdots + x_{ni}\lambda_n.$$

Assertion. $f_{\lambda}(h)$ et $g_{\lambda}(h_0)^{-1}g_{\lambda}$ sont conjuguées pour tout $h \in H_0$.

Considérons φ: $M_{\lambda} \to {}^{\sigma}M_{\lambda}$ un kH_0-isomorphisme. Selon la proposition 3 nous avons

$$\forall h \in H_0, \qquad \varphi_1 f_{\lambda}(h) = g_{\lambda}(h)\varphi_2.$$

En particulier $g_{\lambda}(h_0) = \varphi_1\varphi_2^{-1}$ car $f_{\lambda}(h_0) = 1$. Cela montre que $g_{\lambda}(h_0)$ est inversible et que

$$\forall h \in H_0, \qquad f_{\lambda}(h) = \varphi_2^{-1}[g_{\lambda}(h_0)^{-1}g_{\lambda}(h)]\varphi_2.$$

Or $g_{\lambda}(h_0)^{-1}$ et $g_{\lambda}(h_i)$ commutent. La valeur propre de leur produit est donc le produit des valeurs propres $a_0^{-1}a_i$. (Le scalaire a_0 est non nul car $g_{\lambda}(h_0)$ est inversible.)

D'autre part, la valeur propre de $f_{\lambda}(h_i)$ est λ_i pour chaque i. Nous avons donc $\lambda_i = a_0^{-1}a_i$. Mais a_i est la $i$ème composante de $(\sigma^{-1})^t(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ainsi $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est vecteur propre de $(\sigma^{-1})^t$ avec valeur propre a_0. ∎

Preuve du théorème 5. Soit σ un automorphisme non scalaire de H_0. Notons V_{σ} la réunion des espaces propres de σ dans k^{n+1}. Il s'agit d'une réunion finie de sous-espaces stricts de k^{n+1}.

Notons V_0 le sous-espace de k^{n+1} formé des vecteurs de première coordonnée nulle.

Considérons

$$F = \left[k^{n+1} \Big\backslash \left(V_0 \cup \bigcup_{\substack{\sigma \in \operatorname{Aut} H_0 \\ \sigma \notin \mathbb{F}_p}} V_{\sigma} \bigcup_{\substack{\tau \in \operatorname{End} H_0 \\ \tau \text{ diagonal} \\ \tau \neq 0}} \operatorname{Ker} \tau\right)\right] \cup \{0\}$$

Ce complémentaire F est une réunion infinie de droites car k est infini et nous otons de k^{n+1} une réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts.

Sur chaque droite de F, choisissons le point dont la première coordonnée vaut 1 (nous avons oté V_0 de k^{n+1}).

L'ensemble E' de ces points est donc infini et contenu dans l'ensemble E du théorème 5.

En effet, soit $\lambda \in E'$. Soit σ un automorphisme non scalaire de H_0. Par construction de F, puis de E', le vecteur λ n'est pas vecteur propre de $(\sigma^{-1})^t$. En vertu du lemme précédent, M_λ et ${}^\sigma M_\lambda$ ne sont pas isomorphes.

La condition (b) pour l'ensemble E' est aussi satisfaite. En effet, l'ensemble $\{1, \lambda_1, ..., \lambda_n\}$ est $\mathbb{F}_p$-linéairement dépendant si et seulement si $\lambda = (1, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \operatorname{Ker} \tau$, pour τ un endomorphisme diagonal non nul de H_0. ∎

III. p-Sous-groupe de Sylow invariant

Soit G un groupe fini dont le p-sous-groupe de Sylow H est normal.

En vertu du théorème de Schur–Zassenhaus (voir, par exemple, [6, p. 184]), G est un produit semi direct

$$G = H \rtimes Q$$

pour une action à gauche de Q sur H.

Notons H_0 le plus grand quotient abélien élémentaire de H, c'est-à-dire $H_0 = H/\langle [H, H], H^p \rangle$ (quotient de Frattini). L'action de Q sur H passe au quotient H_0 et nous obtenons une surjection

$$H \rtimes Q \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H_0 \rtimes Q.$$

Si nous supposons H non cyclique, il est bien connu que H admet un quotient abélien non cyclique (voir, par exemple, [5, p. 19]). Ainsi H_0 est non cyclique.

Il est clair que le théorème 1 pour $k(H_0 \rtimes Q)$ entraîne le théorème 1 pour $k(H \rtimes Q)$. En effet un $k(H_0 \rtimes Q)$-module est automatiquement un $k(H \rtimes Q)$-module et cela fournit une injection qui préserve les modules indécomposables et leur propriété d'être symétrique.

La démonstration du théorème 1 pour $k(H_0 \rtimes Q)$ repose sur le lemme suivant qui est bien connu. Voir, par exemple, [7, p. 105].

Rappel. *Le sous-groupe d'inertie de M dans G est le sous-groupe de stabilité de l'action de G sur les classes d'isomorphisme de kH-modules: ${}^aM = {}^{\varphi_a}M$ où φ_a est l'automorphisme de G défini par $\varphi_a(s) = asa^{-1}$.*

Lemme 7 (Critère d'indécomposabilité pour l'induit). *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe normal de G.*

Soit M un kH-module indécomposable dont le sous-groupe d'inertie I_M est trivial ($I_M = H$).

Le module induit $M\uparrow^G = kG \otimes_{kH} M$ est alors aussi indécomposable.

Malheureusement, nous ne pouvons appliquer directement le lemme 7 aux kH_0-modules M_λ^m. Le sous-groupe Q_0 de Q formé des éléments qui agissent comme des scalaires sur H_0 est contenu dans l'inertie de chaque M_λ^m dans $H_0 \rtimes Q$. D'après le théorème 5a), lorsque $\lambda \in E$, le sous-groupe d'inertie de M_λ^m dans $H_0 \rtimes Q$ est exactement $H_0 \rtimes Q_0$.

PROPOSITION 8. *Soit H_0 un p-groupe abélien élémentaire non cyclique $(p \neq 2)$. Soit Q un groupe fini agissant à gauche sur H_0.*

Soit Q_0 le sous-groupe des éléments de Q qui agissent comme des scalaires sur H_0.

L'action de H_0 sur les modules M_λ^m pour $\lambda \in E$, $m \in \mathbb{N}$ s'étend en une action de $H_0 \rtimes Q_0$ par isométries de la forme bilinéaire B dont M_λ^m est muni (cf. Sect. I).

Le $k(H_0 \rtimes Q_0)$ module indécomposable symétrique ainsi obtenu sera noté $\bar{M}_\lambda^m$. Son sous-groupe d'inertie est trivial dans $H_0 \rtimes Q$.

Preuve. Noter que Q_0 est normal dans Q et donc $H_0 \rtimes Q_0$ est normal dans $H_0 \rtimes Q$.

Le sous-groupe d'inertie de M_λ^m $(\lambda \in E)$ dans $H_0 \rtimes Q$ est $H_0 \rtimes Q_0$ en vertu du théorème 5a).

Soit $\chi\colon Q_0 \to \mathbb{F}_p^{\cdot}$ le caractère de l'action de Q_0 sur H_0, i.e., $aha^{-1} = h^{\chi(a)}$. Soit $a \in Q_0$. Nous faisons agir a sur M_λ^m par la matrice $S(a) = \operatorname{diag}\{\chi(a), 1, \chi(a)^{-1}\}$. Il est immédiat de vérifier que

$$S(a)\, S(h) = S(h^{\chi(a)})\, S(a) \qquad \text{pour tout } h \in H_0.$$

Nous obtenons donc bien une action de $H_0 \rtimes Q_0$ sur M_λ^m. De plus il s'avère que $S(a)^t BS(a) = B$ où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la forme qui fait de M_λ^m un module symétrique.

La dernière partie de la proposition est vraie dès que le sous-groupe d'inertie I d'un kH-module M est encore normal dans le groupe et qu'il est possible d'étendre l'action de H sur M à ce sous-groupe I. ∎

Remarque. La preuve de cette proposition n'utilise que la propriété (a) de l'ensemble E du théorème 5. La propriété (b) sera utilisée lorsque le p-Sylow est non normal.

En vertu de la proposition précédente chaque module $V_\lambda^m = (\bar{M}^m)\uparrow^{H_0 \times Q}$ est indécomposable pour chaque $\lambda \in E$.

Chaque V_λ^m est aussi symétrique. En effet, l'induit d'un module symétrique l'est encore. Ce résultat est obtenu en "induisant" aussi une forme symétrique du module d'origine.

Pour finir de montrer que $k(H_0 \rtimes Q)$ est de représentation symétrique non bornée, il suffit de vérifier le résultat suivant:

LEMME 9. *Soit m un entier positif fixé. Les $k(H_0 \rtimes Q)$-modules $\{V_\lambda^m\}_{\lambda \in E}$ sont tous de k-dimension $3m[Q:Q_0]$ et décrivent encore une infinité de classes d'isomorphisme distinctes.*

Preuve. Nous avons vu (proposition 4) que $M_\mu^m \simeq M_\lambda^m \Leftrightarrow \lambda = \mu$. Mais il est possible que l'induction ne soit pas injective, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda, \mu \in E, \lambda \neq \mu$, avec $V_\lambda^m \simeq V_\mu^m$.

Assertion. Les fibres de l'induction sont finies. En effet, définissons sur E la relation d'équivalence

$$\lambda \sim \mu \Leftrightarrow V_\lambda^m \simeq V_\mu^m.$$

Nous voulons voir que chaque $E_\lambda = \{u \in E \mid \mu \sim \lambda\}$ est fini. Nous avons $M_\mu^m \Subset V_\lambda^m \downarrow_{H_0}$, pour tout $\mu \in E_\lambda$. Or si $\mu \neq \mu'$, nous avons $M_\mu^m \not\simeq M_{\mu'}^m$. En utilisant le théorème de Krull–Schmidt, il s'ensuit que $|E_\lambda| \leqslant [Q:Q_0]$. ∎

Remarque. Le théorème 1 est vrai lorsque l'on remplace "symétrique" par "antisymétrique" à condition de faire des hypothèses supplémentaires sur H_0 ou sur le catactère $\chi: Q_0 \to \mathbb{F}_p^{\cdot} \subset k^{\cdot}$. Voir [3] pour les détails de ce qui suit.

(1) Lorsque le rang de H_0 est supérieur ou égal à 3, il est possible de construire des kH_0-modules indécomposables antisymétriques dont le sous-groupe d'inertie dans $H_0 \rtimes Q$ est déjà trivial. Pour cela, il faut considérer des modèles un peu plus compliqués que ceux de la Section I. On rajoute aux données un homomorphisme A de G dans les applications linéaires symétriques de U^* dans U. Le modèle est alors l'espace vectoriel $U \oplus U \oplus U^*$ muni de l'action de G déterminée par la matrice $S(s)$ de la Section I à laquelle on rajoute $A(s)$ au coefficient $(1, 3)$. En spécifiant ce modèle, il est possible d'obtenir des modules de hauteur 3 avec les propriétés décrites.

(2) Lorsque le rang de H_0 est 2 et le caractère $\chi: H_0 \to k^{\cdot}$ est le carré d'un caractère ψ, il suffit de considérer des modules de hauteur 2 comme ceux de l'appendice de cet article.

Le sous-groupe d'inertie de ces kH_0-modules dans $H_0 \rtimes Q$ est $H_0 \rtimes Q_0$, mais il est possible d'étendre l'action à $H_0 \rtimes Q_0$ au moyen de la formule $S(a) = \mathrm{diag}\{\psi(a), \psi(a)^{-1}\}$.

Dans les deux cas, la démarche de cette partie permet d'obtenir que $k(H \rtimes Q)$ est de représentation antisymétrique non bornée. Les paragraphes suivants ne soulèvent aucune difficulté lorsque l'on remplace symétrique par antisymétrique.

Mais le cas où $H_0 = C_p \times C_p$ et où χ n'est pas le carré d'un caractère reste ouvert. En particulier, le groupe $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ de la Section I est l'exemple le plus simple pour lequel le problème est ouvert.

IV. Reduction au normalisateur

THÉORÈME 10. *Soit k un corps de caractéristique p et G un groupe fini. Soit H un p-sous-groupe de Sylow et N son normalisateur.*

Supposons que kN est de représentation symétrique non bornée de vortex H. C'est-à-dire supposons qu'il existe des modules indécomposables symétriques de vortex H, de façon non bornée au sens du théorème 1.

Alors kG est de représentation symétrique non bornée.

Remarque. Puisque le vortex d'un module n'est défini qu'à conjugaison près, il est entendu que "de vortex H" signifie "de vortex l'orbite de H sous la conjugaison du groupe".

Preuve. Considérons la correspondance de Green [8]

$$g: \mathrm{ind}_H kN \to \mathrm{ind}_H kG$$

qui à chaque kN-module indécomposable M de vortex H associe $g(M)$ le seul facteur indécomposable de $M\uparrow^G$ dont le vortex est H.

Assertion. Si M est un kN-module indécomposable symétrique de vortex H, alors $g(M)$ est aussi symétrique.

Tout d'abord $M\uparrow^G$ est symétrique grâce à la forme induite.

Considérons $M\uparrow^G = g(M) \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ une décomposition en kG-modules indécomposables.

Nous avons $M\uparrow^G \simeq (M\uparrow^G)^* = g(M)^* \oplus M_1^* \oplus \cdots \oplus M_r^*$.

Il est clair que le vortex d'un module est le même que celui de son dual. Comme $g(M)$ est le seul facteur dont le vortex est H, il suit du théorème de Krull Schmidt que $g(M)$ est autodual.

Pour montrer que $g(M)$ est symétrique, nous faisons appel au théorème 3.2 de [12] dont voici l'énoncé:

THÉORÈME [12]. *Si Y est un kG-module muni d'une forme symétrique, il existe une décomposition orthogonale en sous-modules*

$$Y = \mathop{\perp}_{i=1}^{s} Y_i \perp \mathop{\perp}_{j=1}^{t} Z_j$$

où les Y_i sont isotypiques en un module indécomposable autodual admettant une forme symétrique, et où les Z_j sont isotypiques en un indécomposable plus son dual qui n'admet pas de forme symétrique.

Dans nos conditions, ce théorème assure l'existence d'une décomposition orthogonale pour la forme de $M\uparrow^G$

$$M\uparrow^G = g(M) \perp X$$

car $g(M) \not\simeq M_i$ pour tout i et $g(M)$ est autodual. Ainsi $g(M)$ est bien symétrique. Cela montre l'assertion.

Pour voir que kG est de représentation symétrique non bornée, il suffit de constater que

$$\dim_k M \leqslant \dim_k g(M) \leqslant [G:N] \dim_k M.$$

Cela est dû au fait que

$$M \in g(M)\downarrow_N \qquad et \qquad g(M) \in M\uparrow^G.$$

Au vu du théorème 10, il faut nous assurer que les modules symétriques construits aux paragraphes précédents sont de vortex le p-Sylow tout entier (lorsque celui-ci est invariant).

Nous aurons ainsi démontré le théorème 1 pour $p \neq 2$ et k infini.

PROPOSITION 11. *Soit k un corps de caractéristique p et H un p-groupe. Soit $M_{f,b}$ un kH-module symétrique construit à partir de données comme à la Section* I.

Supposons que $f(s)$ est invertible pour tout $s \in H$, $s \neq 1$, et supposons que $M = M_{f,b}$ est indécomposable.

Le vortex de M est alors H, sauf au cas suivant: $H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dim $M = 3$. *Dans ce cas M est isomorphe à $k(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.*

Preuve. Soit H' un sous-groupe strict de H. Nous allons montrer que M n'est pas $(H-H')$ projectif (sauf au cas énoncé). Le vortex de M est donc H.

Rappelons que $M = U \oplus U \oplus U^*$ et soc $M\downarrow_{H'} = U \oplus 0 \oplus 0$, rad $M\downarrow_{H'} = U \oplus U \oplus 0$ lorsque $H' \neq 1$ (car $f(s)$ est inversible pour tout $s \in H'$, $s \neq 1$, voir Sect. I).

Cas $H' = 1$. Si M est $(H-1)$ projectif, il est projectif. Or H est un p-groupe et M est indécomposable, donc $M \simeq kH$. Il suit que dim soc $M = 1$, donc dim $M = 3$. La dimension de l'algèbre du groupe est donc 3, d'où $H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Cas $H' \neq 1$. Considérons

$$\mathrm{Tr}_{H'}^{H}\colon \mathrm{End}_{kH'} M\!\downarrow_{H'} \to \mathrm{End}_{kH} M$$
$$\varphi \mapsto \sum_{t \in T} t \cdot \varphi$$

où T est une transversale de H' dans H et $t \cdot \varphi$ est défini par $t \cdot \varphi(m) = t\varphi(t^{-1}m)$.

Nous allons voir que $\mathrm{Tr}_{H'}^{H}$ n'est pas surjective. En vertu du critère de D. G. Higman (voir, par exemple, [9, p. 97]) nous en déduisons que M n'est pas $(H - H')$ projectif.

Soit φ un kH'-endomorphisme de M qui est triangulaire supérieur suivant la proposition 3.

Pour obtenir $t \cdot \varphi$ il nous faut calculer $S(t)\,\varphi S(t^{-1})$. Chacune de ces trois matrices est triangulaire supérieure. De plus les diagonales de $S(t)$ et $S(t^{-1})$ sont constituées de uns.

La matrice $t \cdot \varphi$ est donc triangulaire supérieure et sa diagonale est $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

La diagonale de $\mathrm{Tr}_{H'}^{H} \varphi$ est donc $\{|T|\,\varphi_1, |T|\,\varphi_2, |T|\,\varphi_3\}$. Mais $|T|$ est une puissance de p car H est un p-groupe. Cette diagonale est donc nulle et $\mathrm{Tr}_{H'}^{H}$ n'est pas surjective. ∎

COROLLAIRE 12. *Soit k un corps infini de caractéristique $p \neq 2$. Soit H_0 un p-groupe abélien élémentaire non cyclique.*

Les modules M_λ^m pour $\lambda \in E$, $m \in \mathbb{N}$ (cf. Sect. II) *sont de vortex H_0.*

Preuve. Il résulte du théorème 5(b), que $f(h)$ est inversible pour tout $h \in H_0$, $h \neq 1$. La proposition précédente permet de conclure. ∎

Soit k un corps infini de caractéristique p et G un groupe fini dont un p-sous-groupe de Sylow H est non cyclique.

Soit N le normalisateur de H dans G. Donc $N = H \rtimes Q$. Soit H_0 le quotient de Frattini. Nous avons $\pi\colon H \rtimes Q \to H_0 \rtimes Q$.

Le sous-groupe normal des éléments de Q qui agissent comme des scalaires sur H_0 est noté Q_0.

Nous avons considéré à la Section II les modules M_λ^m pour $\lambda \in E$. Ils sont indécomposables symétriques, de vortex H_0, comme nous venons de le voir. Leur sous-groupe d'isotropie dans $H_0 \rtimes Q$ est $H_0 \rtimes Q_0$.

Nous avons réussi à étendre l'action de H_0 sur M_λ^m en une action de $H_0 \rtimes Q_0$. Le module obtenu est noté $\bar{M}_\lambda^m$. Le module induit $V_\lambda^m = \bar{M}_\lambda^m\!\uparrow^{H_0 \rtimes Q}$ est indécomposable symétrique.

Enfin, nous avons remonté ces modules par π en des $k(H \rtimes Q)$-modules que nous continuons à noter V_λ^m. Il faut nous assurer que le vortex de V_λ^m est H.

Tout d'abord le vortex de V_λ^m dans $H_0 \rtimes Q$ est H_0 lorsque $\lambda \in E$. En effet, le vortex de chaque facteur indécomposable d'un module restreint est inclus (à conjugaison près) dans le vortex du module. Or $M_\lambda^m \ominus V_\lambda^m\downarrow_{H_0}$.

Ensuite le vortex de V_λ^m dans $H \rtimes Q$ est H. En effet, il est bien connu que si M est un kG-module indécomposable et F est un p-sous-groupe normal de G agissant trivialement (p = caractéristique de k) alors F est contenu dans le vortex de M et $(\text{vortex}_G M)/F = \text{vortex}_{G/F} M$.

Les modules de la Section III construits sur le normalisateur du p-sous-groupe de Sylow H sont donc bien de vortex H. En vertu du premier résultat de ce paragraphe, nous obtenons le théorème 1 lorsque $p \neq 2$ et k infini.

V. Corps Finis

A la Section IV nous avons obtenu le théorème 1 lorsque le corps est infini. Cette hypothèse est indispensable pour construire des modules indécomposables d'inertie triviale et vortex maximal (conséquences du théorème 5).

En fait le théorème 1 pour les corps finis découle de sa validité pour les corps algébriquement clos (qui sont infinis). L'idée m'a été fournie par D. Benson que je tiens à remercier.

Théorème 13. *Soit k un corps fini et $\bar{k}$ une clotûre algébrique de k. Soit G un goupe fini.*

Supposons que $\bar{k}G$ est de représentation symétrique non bornée. C'est alors aussi le cas de kG.

Voici d'abord quelques rappels et notations.

Definition (inertie scalaire). Soit l un corps, G un groupe fini et M un lG-module. Soit $\sigma \in \text{Aut}\, l$.

M^σ désigne le même groupe abélien que M, avec le même action de G, mais muni d'une nouvelle action de l:

$$\lambda \cdot m = \sigma(\lambda)m.$$

Nous obtenons une action de $\text{Aut}\, l$ sur les classes d'isomorphie de lG-modules. Le stabilisateur d'un lG-module M est le *groupe d'inertie scalaire*, noté S_M.

Definition (extension et restriction des scalaires). Soit $k \subset l$ une extension de corps et V un kG-module. Le module *étendu à l* est $l \otimes_k V$.

Soit M un lG-module. Le module *restreint à k*, noté ${}_kM$ est obtenu en ne considérant que l'action de kG sur M.

Remarque. Soit $\Gamma = \mathrm{Aut}(l/k)$. L'inertie scalaire dans Γ d'un module étendu $l \otimes_k V$ est Γ tout entier.

Voici un résultat bien connu:

PROPOSITION 14 (Critère d'indécomposabilité du restreint). *Soit $k \subset l$ une extension galoisienne de degré fini. Soit M un lG-module indécomposable et supposons $S_M = 1$ (l'inertie scalaire dans $\Gamma = \mathrm{Aut}(l/k)$ est triviale).*
Alors ${}_kM$ est un kG-module indécomposable.

DEFINITION. Soit $k \subset l$ une extension de corps et M un lG-module. Nous disons que M est *réalisable sur k* si M admet une l-base pour laquelle l'action de chaque $s \in S$ est à coefficients dans k.

L'enveloppe k-linéaire de cette base est un kG-module noté M_k.

Remarque. $l \otimes_k M_k = M$.

PROPOSITION 15 (Voir [10, p. 394]). *Soit l un corps fini et Γ un groupe d'automorphismes dont le corps fixe est k. Soit M un lG-module avec $S_M = \Gamma$.*
Alors M est réalisable sur k.

Preuve du théorème 13. Soit M un $\bar{k}G$-module symétrique indécomposable. Il est clairement réalisable sur une extension finie de k. Soit l un sous-corps de $\bar{k}$ de degré minimal sur k tel que M est réalisable sur l pour une $\bar{k}$-base de M que nous fixons.

Assertion. Le module restreint ${}_k(M_l)$ est kG-indécomposable.
Nous avons $(M_l)^\sigma \not\simeq M$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(l/k)$ avec $\sigma \neq 1$. En effet, sinon M est réalisable sur le corps fixe d'un $\sigma \neq 1$ avec $(M_l)^\sigma \simeq M$, suivant la proposition 15. Cela contredit le degré minimal de l.

En vertu de la proposition 14, l'assertion est démontrée.

Assertion. Le module restreint ${}_k(M_l)$ est symétrique. Choisissons une forme symétrique $b\colon M \times M \to \bar{k}$ non dégénérée et le groupe G agissant par isométries.

Considérons l' le plus petit sous-coprs de $\bar{k}$ contenant l et les coefficients de la matrice de b dans la $\bar{k}$-base fixée de M. Il s'agit d'une extension finie de l et il est possible que $l \subsetneq l'$.

Notons $b_{l'}: M_{l'} \times M_{l'} \to l'$ la forme obtenue. Considérons maintenant l'application l-linéaire:

$$\mathrm{Tr}_{l'/l}: l' \to l,$$
$$a \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(l'/l)} \sigma(a).$$

Elle fournit la forme l-bilinéaire, dite forme trace:

$$l' \times l' \to l,$$
$$(a, d) \mapsto \mathrm{Tr}_{l'/l}(ad)$$

qui est non dégénérée car $l \subset l'$ est une extension de corps finis.

Considérons alors la forme l-bilinéaire:

$$c: M_{l'} \times M_{l'} \xrightarrow{b_{l'}} l' \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{l'/l}} l$$

Elle est symétrique et l'action de G sur $M_{l'}$ se fait par isométries de c. Voyons qu'elle est non dégénérée: soit $m \in M_{l'}$ et supposons $c(m, n) = 0$ pour tout $n \in M_{l'}$. Soit $a \in l'$, quelconque. Nous avons

$$c(m, an) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad n \in M_{l'}.$$

Donc $\mathrm{Tr}_{l'/l}[ab_{l'}(m, n)] = 0$, pour tout $a \in l'$ et pour tout $n \in M_{l'}$.

Puisque la forme trace est non dégénérée, nous obtenons $b_{l'}(m, n) = 0$, pour tout $n \in M_{l'}$. D'où $m = 0$.

L'enveloppe l-linéaire de la $\bar{k}$-base fixée de M est le module M_l. La forme

$$c_l: M_l \times M_l \to l$$

en fait un module symétrique.

Considérons maintenant la forme k-bilinéaire

$${}_k(M_l) \times {}_k(M_l) \xrightarrow{c_l} l \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{l/k}} k$$

Le même raisonnement que pour c montre que cette forme est encore non dégénérée. Elle fait de ${}_k(M_l)$ un module indécomposable symétrique. ∎

Remarque. Si $p \neq 2$, voici une façon d'obtenir le résultat sans considérer l':

${}_k(M_l)$ est autodual car l'extension des scalaires est injective et M est autodual. Ainsi M est ε-symétrique pour un ε convenable ($\varepsilon = \pm 1$, voir Sect. I). Donc $\bar{k} \otimes_l M = M$ est aussi ε-symétrique. Mais $\bar{k}$ est algébriquement clos et M est déjà symétrique. Cela implique $\varepsilon = 1$. (cf. Sect. I).

Le résultat pour $p = 2$ est cependant utile. Nous l'utilisons dans l'appendice qui suit.

APPENDICE: $p=2$

Soit H_0 un 2-groupe abélien élémentaire de base $h_0,..., h_n$ avec $n \geqslant 1$. Soit k un corps de caractéristique 2.

Nous allons construire des kH_0-modules symétriques indécomposables de hauteur 2. Les modèles de la Section I ne peuvent pas être utilisés lorsque $p=2$.

Soit $\lambda=(1, \lambda_1,..., \lambda_n) \in k^{n+1}$. Soit U un k-espace vectoriel de dimension m. Considérons l'homomorphisme $f_\lambda: H_0 \rightarrow \mathrm{Hom}_k(U, U)$ défini par $f_\lambda(h_0)=1$, $f_\lambda(h_1)=J_{\lambda_1}$, et $f_\lambda(h_i)=\lambda_i$ si $i \geqslant 2$.

Le kH_0-module M_λ^m est le k-espace vectoriel $U \oplus U$ muni de l'action de H_0 suivante:

$$S(h)=\begin{pmatrix} 1 & f_\lambda(h) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette action est par isométries de la forme symétrique

$$B=\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c=\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques. Cette construction est valable en toute caractéristique p. Mais lorsque $p \neq 2$, ces modules sont en fait antisymétriques pour la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons que ces modules sont de hauteur 2 et $\operatorname{soc} M_\lambda^m = \operatorname{rad} M_\lambda^m = U \oplus 0$. Chaque M_λ^m est indécomposable et $M_\lambda^m \simeq M_\lambda^m \Leftrightarrow \lambda=\mu$. Ainsi kH_0 est de représentation symétrique non bornée, comme à la Section II.

De même, il est facile de vérifier que si $M_\lambda^m \simeq {}^\sigma(M_\lambda^m)$ pour $\sigma \in \operatorname{Aut} H_0$, alors λ est vecteur propre de $(\sigma^{-1})^t$.

Soit maintenant G un groupe fini dont le 2-sous-groupe de Sylow H est normal et non cyclique. Soit H_0 son quotient de Frattini et Q_0 le noyau de l'action de Q sur H_0. Nous avons $H_0 \times Q_0$ normal dans $H_0 \rtimes Q$.

Nous étendons l'action de H_0 sur chaque M_λ^m en une action de $H_0 \times Q_0$ en faisant agir $a \in Q_0$ par l'identité. Lorsque $\lambda \in E$ (théorème 5) le module obtenu a un sous-groupe d'inertie trivial dans $H_0 \rtimes Q$. Les modules $M_\lambda^m \uparrow^{H_0 \rtimes Q}$ démontrent que kG est de représentation symétrique non bornée lorsque k est infini.

En raisonnant comme pour p impair nous obtenons que ces modules sont de vortex maximal. Lorsque $p = 2$ et k est infini, nous pouvons donc utiliser la correspondance de Green et obtenir le théorème 1.

Le Section V est sans restriction sur p, de sorte que le théorème 1 est aussi vrai pour les corps finis de caractéristique 2.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. F. BURGERMEISTER, "Représentations de la double flèche," travail de diplôme, Section de Mathématiques, Université de Genève, 1984.
2. J. DIEUDONNÉ, Sur la réduction canonique des couples de matrices, *Bull. Soc. Math. France* **74** (1946), 130–146.
3. C. CIBILS, "Représentations modulaires autoduales," thèse de doctorat, Section de Mathématiques, Université de Genève, 1984.
4. C. CIBILS, Groupe de Witt d'une algèbre avec involution, *Enseign. Math.* **29** (1983), 27–43.
5. C. CURTIS AND I. REINER, "Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras," Interscience, New York, 1964.
6. C. CURTIS AND I. REINER, "Methods of Representation Theory," Wiley–Interscience, New York, 1981.
7. W. FEIT, The representation theory of finite groups, Vol. 25, North-Holland, Amsterdam, 1982.
8. J. A. GREEN, A transfer theorem for modular representations, *J. Algebra* **1** (1964), 73–84.
9. D. G. HIGMAN, Indecomposable representations at characteristic *p*, *Duke Math. J.* **21** (1954), 337–381.
10. C. KRATZER, Rationalité des représentations de groupes finis, *J. Algebra* **81** (1983), 390–402.
11. P. LANDROCK, "Finite Groups Algebras and Their Modules," London Math. Society, LNS, Vol. 84, Cambridge Univ. Press, England, 1983.
12. H. QUEBBEMANN, W. SCHARLAU, AND M. SCHULTE, Quadratic and hermitian forms in additive and abelian categories, *J. Algebra* **59** (1979), 264–289.